Éllipsoïde de John-Loewner

- Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS, Algèbre 3.* (222-223, 229-231)

Lemme : Soient $A, B \in \mathcal{S}^{++}(\mathbb{R})$ distinctes. Soient $a, b \in]0,1[$ tels que $a+b=1$. Alors,

$$\det(aA+bB) > (\det A)^a (\det B)^b$$

Démonstration. Le théorème de pseudo-réduction simultanée donne qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tPP$ et $B = {}^tPDP$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (où $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_i > 0$).

$$(\det A)^a (\det B)^b = (\det P^2)^a (\det P^2 \det D)^b = (\det P^2)(\det D)^b \quad \text{car } a+b=1$$

D'autre part, $\det(aA+bB) = \det(a{}^tPP + b{}^tPDP) = \det P^2 \det(aI_n + bD)$.
On s'est donc ramené à montrer que $\det(aI_n+bD) > (\det D)^b$ c'est à dire que

$$\prod_{i=1}^n (a+b\lambda_i) > \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i\right)^b \quad \text{ou} \quad \sum_{i=1}^n \ln(a+b\lambda_i) > b\sum_{i=1}^n \ln(\lambda_i)$$

Par concavité du logarithme, on a $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\ln(a+b\lambda_i) \geqslant a\ln(1) + b\ln(\lambda_i) = b\ln(\lambda_i)$. Comme $A \neq B$ alors $D \neq I_n$ et il existe $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $\lambda_{i_0} \neq 1$, donc par stricte concavité du logarithme, on a $\ln(a+b\lambda_{i_0}) > a\ln(1) + b\ln(\lambda_{i_0}) = b\ln(\lambda_{i_0})$.
Le résultat s'obtient donc en sommant les inégalités. □

Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$. Il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K.

Démonstration. On rappelle qu'un ellipsoïde plein centré en 0 de $\mathbb{R}^n$ a une équation du type $q(x) \leqslant 1$, où $q \in Q_{++}$. On pose pour $q \in Q_{++}$, $\mathcal{E}_q = \{x \in \mathbb{R}^n,\ q(x) \leqslant 1\}$.

Existence :

- Calcul du volume V_q de $\mathcal{E}_q$: Comme $q(x) = {}^txSx$ avec $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ alors par le théorème spectral, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $S = P\mathrm{diag}(q_1, \dots, q_n){}^tP$ avec $q_i > 0$. Donc $\det q = q_1 \cdots q_n$ (ne dépend pas de la base orthonormée choisie).

Donc dans la base orthonormée, on a $q(x) = \sum_{i=1}^n q_i x_i^2$.

On fait alors le changement de base $x = Py$ (P est la matrice de passage de la base canonique à la base orthonormée). Le jacobien vaut 1 car $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On a alors

$$V_q = \int_{q(y)\leqslant 1} \mathrm{d}\lambda(y) = \int\int \dots \int_{q_1x_1^2+\dots+q_nx_n^2 \leqslant 1} \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n$$

où λ est la mesure de Lebesgue sur la base canonique. On considère le changement de variables donné par $x_i = \dfrac{t_i}{\sqrt{q_i}}$ (un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme) dont le jacobien est $\dfrac{1}{\sqrt{q_1 \dots q_n}}$.

$$V_q = \frac{1}{\sqrt{q_1 \dots q_n}} \int\int \dots \int_{t_1^2+\dots+t_n^2\leqslant 1} \mathrm{d}t_1 \dots \mathrm{d}t_n = \frac{V_0}{\sqrt{\det(q)}}$$

où V_0 est le volume de la boule unité pour la norme euclidienne canonique.

- Le problème peut donc se reformuler ainsi : il s'agit de montrer qu'il existe un unique $q \in Q_{++}$ telle que $\det(q)$ soit maximal et que $\forall x \in K$, $q(x) \leqslant 1$.

Posons à présent la norme $N(q) = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |q(x)|$ sur l'espace Q et on définit l'ensemble $\mathcal{A} = \{q \in Q_+,\ \forall x \in K,\ q(x) \leqslant 1\} \subset Q$. On va chercher à maximiser $\det(q)$ sur $\mathcal{A}$. Montrons que $\mathcal{A}$ est un compact convexe non vide de Q.

⋆ $\mathcal{A}$ est convexe : Soient $q, q' \in \mathcal{A}$ et $\lambda \in [0,1]$. La forme quadratique $\lambda q + (1-\lambda)q'$ est positive. De plus, $\forall x \in K,\ (\lambda q + (1-\lambda)q')(x) \leqslant \lambda + 1 - \lambda = 1$. Donc $\lambda q + (1-\lambda)q' \in \mathcal{A}$.

⋆ $\mathcal{A}$ est fermé : Soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{A}$ convergente dans Q vers q.
On a pour $x \in \mathbb{R}^n,\ |q(x) - q_n(x)| \leqslant N(q - q_n)\|x\|$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n(x) = q(x)$.
On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ q(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} q_n(x) \geqslant 0$ (car $q_n \in \mathcal{A} \subset Q_+$) et $\forall x \in K$, $q(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} q_n(x) \leqslant 1$ donc $q \in \mathcal{A}$.

⋆ $\mathcal{A}$ est borné : Comme K est d'intérieur non vide, il existe $a \in K$ et $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset K$. Soit $q \in \mathcal{A}$.
Si $\|x\| < r$, alors $a + x \in K$, donc $q(a+x) \leqslant 1$. D'autre part, on a $q(-a) = q(a) \leqslant 1$ ($q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$). On obtient alors par l'inégalité de Minkowski,

$$\sqrt{q(x)} = \sqrt{q(x+a-a)} \leqslant \sqrt{q(x+a)} + \sqrt{q(-a)} \leqslant 2$$

Donc $q(x) \leqslant 4$. Si $\|x\| \leqslant 1$, alors $|q(x)| = q(x) = \dfrac{1}{r^2} q(rx) \leqslant \dfrac{4}{r^2}$. Ainsi, $N(q) \leqslant \dfrac{4}{r^2}$.

⋆ $\mathcal{A}$ est non vide : comme K est compact, il existe $M > 0$ tel que $K \subset B(0,M)$.
La forme quadratique $q(x) = \dfrac{\|x\|^2}{M^2}$ convient.

• L'application déterminant est continue, donc $q \mapsto \det(q)$ est continue sur le compact $\mathcal{A}$, et atteint donc un maximum sur $\mathcal{A}$ en un certain q_0.
Comme $\mathcal{A}$ contient $x \mapsto \dfrac{\|x\|^2}{M^2} \in Q_{++}$, alors $\det(q_0) > 0$ donc $q_0 \in Q_{++}$. D'où l'existence.

Unicité : Soit $q \in \mathcal{A}$ tel que $\det(q) = \det(q_0)$ et $q \neq q_0$. Soient $S, S_0 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ les matrices respectives de q et q_0 dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Comme $\mathcal{A}$ est convexe, $\frac{1}{2}(q+q_0) \in \mathcal{A}$, et par le lemme, on obtient

$$\det\left(\frac{1}{2}(q+q_0)\right) = \det\left(\frac{1}{2}(S+S_0)\right) > (\det S)^{\frac{1}{2}}(\det S_0)^{\frac{1}{2}} = \det S_0 = \det(q_0)$$

Ce qui contredit la maximalité de $\det(q_0)$. □

Remarque. Le résultat reste vrai dans un e.v. réel quelconque de dimension finie muni d'une structure euclidienne.

Réduction pseudo-simultanée : Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
Alors, il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPAP = I_n$ et ${}^tPBP = D$ où D est diagonale réelle.

Démonstration. Comme $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ alors $\Phi : (X,Y) \mapsto {}^tXAY$ est un produit scalaire de $\mathbb{R}^n$. Donc il existe une base orthonormée pour Φ i.e. $\exists Q \in GL_n(\mathbb{R}),\ {}^tQAQ = I_n$.
Comme ${}^tQBQ \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ alors par le théorème spectral, il existe $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tU{}^tQBQU = D$. On pose $P = QU$ et on obtient le résultat souhaité. □

Application : Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension finie n muni d'une norme euclidienne $\|\cdot\|$. Soit G un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}(E)$. Il existe $q \in Q_{++}$ telle que $G \subset \mathcal{O}(q)$.

Démonstration. Posons $K = \{g(x),\ g \in G \text{ et } x \in B(0,1)\} = \bigcup\limits_{g\in G} g(B(0,1))$.
K est compact comme image du compact $G \times B(0,1)$ par $(g,x) \mapsto g(x)$ continue et $\mathring{K} \neq \varnothing$ puisque $K \subset B(0,1)$ (pour $g = \mathrm{Id}_E$). On pose l'unique ellipsoïde $\mathcal{E}_q$ de volume minimal contenant K où $q \in Q_{++}$. Soit $g \in G$. $q' = q \circ g \in Q_{++}$ et $K \subset \mathcal{E}_{q'}$ (car $\exists g' \in G,\ \exists x \in B(0,1),\ g'(x) \in K$ et $q'(g'(x)) = q \circ g \circ g'(x) \leqslant 1$ et $g \circ g' \in G$ car $K \subset \mathcal{E}_q$).
D'autre part, comme det est borné sur G compact donc sur $\{g^p,\ p \in \mathbb{Z}\}$.
Si $|\det g| > 1$ alors $\lim\limits_{p\to+\infty} |\det g|^p = +\infty$ et si $|\det g| < 1$ alors $\lim\limits_{p\to-\infty} |\det g|^p = +\infty$. Donc $|\det g| = 1$. On a donc $\det(q') = \det(q)$ et par unicité $q = q'$. Ainsi, $\forall g \in G,\ g \in \mathcal{O}(q)$.
Donc $G \subset \mathcal{O}(q)$. □